Dạng 1. Phương trình căn cơ bản

☆☆☆

① $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$.

② $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \end{cases}$.

Phương pháp tổng quát : (nếu không thuộc hai dạng trên)

— Bước 1. Đặt điều kiện cho căn có nghĩa.

— Bước 2. Chuyển vế sao cho hai vế không âm.

— Bước 3. Bình phương hai vế để đưa về một trong các dạng trên.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Giải các phương trình sau

a/ $\sqrt{2x-3} = x-3$.

b/ $\sqrt{5x+10} = 8-x$.

c/ $x - \sqrt{2x-5} = 4$.

d/ $\sqrt{x^2+x-12} = 8-x$.

e/ $\sqrt{x-2} = 4-x$.

f/ $\sqrt{3x^2-9x+1} = x-2$.

g/ $\sqrt{3x^2-9x+1} = |x-2|$.

h/ $\sqrt{x^2-3x-10} = x-2$.

i/ $x - \sqrt{2x+7} = 4$.

j/ $x + \sqrt{x-1} = 13$.

k/ $x - \sqrt{x-1} = 3$.

l/ $\sqrt{x^2-3x-1} = 2x-7$.

m/ $\sqrt{x^2+3x} = 3x-1$.

n/ $\sqrt{x^2-9x+1} = x-2$.

o/ $2x - \sqrt{2x-1} = 7$.

p/ $\sqrt{3-x} = 3x-5$.

q/ $x - \sqrt{4x-3} = 2$.

r/ $\sqrt{x^2-1} = x-1$.

s/ $x-2 = \sqrt{x^2-4x+3}$.

t/ $\sqrt{x^2-3x+2} = 2x-1$.

u/ $\sqrt{-x^2+4x-3} = 2x-5$.

v/ $\sqrt{5-x^2} = x-1$.

x/ $\sqrt{3x^2+5x+1} + 1 = 4x$.

y/ $\sqrt{x^2-2x+1} = x^2-2x+1$.

Bài 2. Giải các phương trình

a/ $x^2 + \sqrt{x+7} = 7$.

b/ $\sqrt{-x^2+4x-3} = 2x-5$.

c/ $\sqrt{16x+17} = 8x-23$.

d/ $\sqrt{-x^2+4x} + 2 = 2x$.

e/ $\sqrt{x^2-6x+6} = 2x-1$.

f/ $x^2 - 1 = \sqrt{x+1}$.

g/ $\sqrt{4-x^2} = x+2$.

h/ $\sqrt{4-x^2} = x+2$.

Bài 3. Giải các phương trình sau

a/ $\sqrt{x^2+2x+4} = \sqrt{2-x}$.

b/ $\sqrt{x^2-3x} = \sqrt{2x-1}$.

c/ $\sqrt{2x^2-2x+4} = \sqrt{x^2-x+2}$.

d/ $\sqrt{x^2-3x-2} = \sqrt{x-3}$.

Bài 4. Giải các phương trình sau

a/ $\sqrt{2x+1} = 2 + \sqrt{x-3}$.

b/ $\sqrt{3x+4} - \sqrt{x-3} = 3$.

c/ $\sqrt{x-3} - \sqrt{x+2} = 5$.

d/ $\sqrt{2x+1} = 4 - \sqrt{x-3}$.

e/ $\sqrt{5x-1} = \sqrt{3x-2} + \sqrt{2x+2}$.

f/ $\sqrt{3x+1} - \sqrt{4x-3} = \sqrt{5x+4}$.

g/ $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1$.

h/ $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2$.

i/ $\sqrt{x^2+9} - \sqrt{x^2-7} = 2$.

j/ $\sqrt{3x^2+5x+8} - \sqrt{3x^2+5x+1} = 1$.

k/ $\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x+2} = 1$.

l/ $\sqrt{x+4} - \sqrt{2x-6} = 1$.

m/ $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2$.

n/ $\sqrt{11-x} - \sqrt{x-1} = 2$.

o/ $\sqrt{x^2+9} - \sqrt{x^2+7} = 2$.

p/ $\sqrt{x} + \sqrt{x-5} = \sqrt{5}$.

q/ $\sqrt{3x-5} + \sqrt{2x+3} = \sqrt{x+2}$.

r/ $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-3}$.

s/ $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = \sqrt{2x-8}$.

t/ $\sqrt{2-x} = \sqrt{7-x} - \sqrt{-3-2x}$.

u/ $\sqrt{5x-1} = \sqrt{3x-2} - \sqrt{2x-1}$.

v/ $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-4}$.

x/ $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = \sqrt{3x-5}$.

y/ $\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}$.

Bài 5. Giải các phương trình sau

a/ $1 + \sqrt{x-1} = \sqrt{6-x}$.

b/ $\sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-2} - \sqrt{x-1} = 0$.

c/ $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x+2}$.

d/ $\sqrt{3x+1} = 8 - \sqrt{x+1}$.

e/ $\sqrt{3x-3} - \sqrt{5-x} = \sqrt{2x-4}$.

f/ $\sqrt{x+9} = 5 - \sqrt{2x+4}$.

Dạng 2. Phương trình căn sử dụng đặt ẩn phụ

☆☆☆

① **Loại 1**. $af(x) + b\sqrt{(x)} + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{f(x)}, & t \geq 0 \\ at^2 + bt + c = 0 \end{cases}$.

② **Loại 2**. $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} + \sqrt{f(x).g(x)} = h(x)$. Đặt $t = \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}$.

③ **Loại 3**. Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình : $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = h(x)$.

- Đặt $u = f(x),\ v = g(x)$ với $u, v \geq 0$.
- Đưa phương trình trên về hệ phương trình với hai ẩn là u và v.

Ta có thể giải dạng tổng quát dạng : $\sqrt[n]{f(x)} + \sqrt[m]{g(x)} = a,\ (a = \text{const})$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 6. Giải các phương trình sau

a/ $x^2-6x+9=4\sqrt{x^2-6x+6}$.

b/ $\sqrt{(x-3)(8-x)}+26=-x^2+11x$.

c/ $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$.

d/ $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x^2+3x}$.

e/ $x^2+\sqrt{x^2+11}=31$.

f/ $x^2-2x+8-4\sqrt{(4-x)(x+2)}=0$.

g/ $4x^2-12x-5\sqrt{4x^2-12x+11}=0$.

h/ $x^2+4x-3\left|2+x\right|+4=0$.

i/ $4x^2+\dfrac{1}{x^2}+\left|2x-\dfrac{1}{x}\right|-6=0$.

j/ $x^2-x+\sqrt{x^2-x+9}=3$.

k/ $x^2+2\sqrt{x^2-3x+11}=3x+4$.

l/ $x^2-3x-10+3\sqrt{x(x+3)}=0$.

m/ $x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}=0$.

n/ $2x-x^2+\sqrt{6x^2-12x+7}=0$.

o/ $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=0$.

p/ $(x-3)^2+3x-22=\sqrt{x^2-3x+7}$.

q/ $x^2+1-7\sqrt{x^2+1}+10=0$.

r/ $\sqrt{2x^2-8x+12}=x^2-4x-6$.

Bài 7. Giải các phương trình sau

a/ $\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x}=3+\sqrt{(x+3)(6-x)}$.

b/ $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{(2x+3)(x+1)}-16$.

c/ $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}-\sqrt{(x-1)(3-x)}=1$.

d/ $\sqrt{7-x}+\sqrt{2+x}-\sqrt{(7-x)(2+x)}=3$.

e/ $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}+\sqrt{(x+1)(4-x)}=5$.

f/ $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$.

g/ $1+\dfrac{2}{3}\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$.

h/ $\sqrt{x}+\sqrt{9-x}=\sqrt{-x^2+9x+9}$.

i/ $x+\sqrt{17-x^2}+x\sqrt{17-x^2}=9$.

j/ $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x$.

k/ $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=2x-12+2\sqrt{x^2-16}$.

l/ $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$.

m/ $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$.

n/ $\sqrt{3x^2+6x+16}+\sqrt{x^2+2x}=2\sqrt{x^2+2x+4}$.

Bài 8. Giải các phương trình sau

a/ $2\sqrt{\dfrac{3x-1}{x}}=\dfrac{x}{3x-1}+1$.

b/ $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x}=1$.

c/ $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

d/ $\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{x}=1$.

e/ $x^3+2=3\sqrt[3]{3x-2}$.

f/ $\sqrt[5]{\dfrac{16x}{x-1}}+\sqrt[5]{\dfrac{x-1}{16x}}=\dfrac{5}{2}$.

g/ $\sqrt[3]{\dfrac{2x}{x+1}}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2x}}=2$.

h/ $\dfrac{3+x}{3x}=\sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{4}{9}+\dfrac{2}{x^2}}}$.

i/ $x+\sqrt{4-x^2}=2+3x\sqrt{4-x^2}$.

j/ $2\sqrt[4]{\left(1+x\right)^2}+3\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{\left(1-x\right)^2}=0$.

k/ $\sqrt[4]{5-x}+\sqrt[4]{4-x}=\sqrt{2}$.

l/ $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0$.

m/ $\sqrt[3]{x+3}=1+\sqrt{x}$.

n/ $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$.

Dạng 3. Đưa về phương trình tích số (nhóm, liên hiệp, …)

☆☆☆

- Đoán nhận một nghiệm của phương trình để định hướng đưa về phương trình tích số hoặc nhân liên hiệp.
- Cần chú ý đến các cách biến đổi về tích và nhân liên hiệp

Biểu thức	Biểu thức liên hiệp	Tích
$\sqrt{A}\pm\sqrt{B}$	$\sqrt{A}\mp\sqrt{B}$	$A-B$
$\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$	$\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B}$	$A+B$
$\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}$	$\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B}$	$A-B$

- $f\left(x\right)=ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$ với x_1 và x_2 là hai nghiệm của $f\left(x\right)=0$.

  $*$ $u+v=1+uv\Leftrightarrow\left(u-1\right)\left(v-1\right)=0$

  $*$ $au+bv=ab+vu\Leftrightarrow\left(u-b\right)\left(v-a\right)=0$.

- Cần lưu ý đến các hằng đẳng thức (kết hợp đồng nhất thức)

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 9. Giải các phương trình sau

a/ $\left(x-3\right)\sqrt{x^2+4}=x^2-9$.

b/ $\left(x-3\right)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6$.

c/ $\left(x+3\right)\sqrt{10-x^2}=x^2-x-12$.

d/ $\left(x+1\right)\sqrt{16x+17}=8x^2-15x-23$.

e/ $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2$.

f/ $\sqrt{x^2+10x+21}=3\sqrt{x+3}+2\sqrt{x+7}-6$.

g/ $x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{-x^2+8x-7}+1$.

h/ $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x}=x$.

i/ $\sqrt{x^2-x-2}-2\sqrt{x-2}+2=\sqrt{x+1}$.

j/ $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}$.

k/ $\sqrt{x\left(x-1\right)}+\sqrt{x\left(x+2\right)}=2\sqrt{x^2}$.

l/ $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}=\sqrt{x^2-9x+18}$.

m/ $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}$.

n/ $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0$.

o/ $\dfrac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}=1-x$.

p/ $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=1+\sqrt[3]{x^2+3x+2}$.

q/ $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2+x}$.

r/ $\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{x^2+4x+3}$.

s/ $\sqrt{x+3}+\dfrac{4x}{\sqrt{x+3}}=4\sqrt{x}$.

t/ $\sqrt{x+1}+2\left(x+1\right)=x-1+\sqrt{1-x}+3\sqrt{1-x^2}$.

Bài 10. Giải phương trình

a/ $\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}=\dfrac{x+3}{5}$.

b/ $\dfrac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\dfrac{3}{x}$.

c/ $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}-\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\dfrac{\sqrt{3}}{x}$.

d/ $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

e/ $\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{5}{2\sqrt{x^2+1}}$.

f/ $\dfrac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\dfrac{3}{x}$.

g/ $4\left(x+1\right)^2=\left(2x+10\right)\left(1-\sqrt{3+2x}\right)^2$.

h/ $2x^2=\left(x+9\right)\left(2-\sqrt{9+2x}\right)^2$.

i/ $x+\sqrt{x^2+16}=\dfrac{40}{\sqrt{x^2+16}}$.

j/ $\dfrac{3x}{\sqrt{3x+10}}=\sqrt{3x+1}-1$.

k/ $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=\dfrac{3x-2}{\sqrt{3}}$.

l/ $\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=2x$.

m/ $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$.

n/ $\sqrt[3]{x^2-1}+x=\sqrt{x^3-2}$.

o/ $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$.

p/ $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=\dfrac{6x-4}{\sqrt{x^2+4}}$.

Dạng 4. Sử dụng hằng đẳng thức đưa về phương trình cơ bản

☆☆☆

① **Loại 1**. $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{C}\quad (*)$

Ta có $(*)\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)^3=\left(\sqrt[3]{C}\right)^3\Leftrightarrow A+B+3\sqrt[3]{AB}\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)=C\quad (**)$

Thay $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{C}$ vào $(**)$, ta được: $(**)\Leftrightarrow A+B+3\sqrt[3]{ABC}=C$.

② **Loại 2**. $\sqrt{f\left(x\right)}+\sqrt{g\left(x\right)}=\sqrt{h\left(x\right)}+\sqrt{k\left(x\right)}$ với $\left[\begin{array}{l} f\left(x\right)+h\left(x\right)=g\left(x\right)+k\left(x\right)\\ f\left(x\right).h\left(x\right)=g\left(x\right).k\left(x\right)\end{array}\right.$

- Biến đổi về dạng: $\sqrt{f\left(x\right)}-\sqrt{h\left(x\right)}=\sqrt{k\left(x\right)}-\sqrt{g\left(x\right)}$.
- Bình phương, giải phương trình hệ quả.

③ **Loại 3**. Căn trong căn

Sử dụng hằng đẳng thức $a^2+b^2\pm 2ab=\left(a\pm b\right)^2$ nhưng lưu ý

$\left|A\right|=\begin{cases}A \text{ khi } A\ge 0\\ A \text{ khi } A<0\end{cases}$. Đưa về phương trình căn cơ bản.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 11. Giải phương trình

a/ $2\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+1}=4$.

b/ $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=-2$.

c/ $\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}-\sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}}+3=0$

d/ $\sqrt{2x-4+2\sqrt{2x-5}}+\sqrt{2x+4+6\sqrt{2x-5}}=14$.

e/ $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1$.

f/ $\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}-2\sqrt{2x+3-4\sqrt{2x-1}}+3\sqrt{2x+8-6\sqrt{2x-1}}=4$.

g/ $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

h/ $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}-\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}+5=0$.

i/ $\sqrt{2x-4-2\sqrt{2x-5}}-\sqrt{2x+4+6\sqrt{2x-5}}+4=0$.

j/ $\sqrt{2x-2+2\sqrt{2x-3}}=4+\sqrt{2x-6-6\sqrt{2x-3}}$.

k/ $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\dfrac{x+3}{2}$.

l/ $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$.

m/ $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=1$.

n/ $\sqrt{x+\sqrt{14x-49}}+\sqrt{x-\sqrt{14x-49}}=\sqrt{14}$.

o/ $21x-63+7\sqrt{10-4\left|3x-9\right|}=0$.

Bài 12. Giải phương trình

a/ $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$.

b/ $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{3x-2}$.

c/ $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}$.

d/ $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$.

e/ $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{2x^2}+\sqrt[3]{2x^2+1}$.

f/ $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{3x-2}=0$.

g/ $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{2x+2}+\sqrt[3]{2x+3}=0$.

h/ $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12\left(x-1\right)}$.

Bài 13. Giải phương trình

a/ $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=2\sqrt{x}+\sqrt{2x+2}$.

b/ $\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x+3}}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x+3}$.

c/ $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{6x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}$.

d/ $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}$.

e/ $\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3\left(x^2-x-1\right)}-\sqrt{x^2-3x+4}$.

f/ $\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+7}=\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2+x+8}$.

g/ $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}$.

Bài 14. Giải phương trình

a/ $4\sqrt[3]{\left(x+2\right)^2}-7\sqrt[3]{\left(4-x^2\right)}+3.\sqrt[3]{\left(2-x\right)^2}=0$.

b/ $2\left(x^2+2\right)=5\sqrt{x^3+1}$.

c/ $x^2+3\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x^4-x^2+1}$.

Bài 15. Giải phương trình (đặt ẩn phụ không hoàn toàn)

a/ $x^2+2\left(x-1\right)\sqrt{x^2+x+1}-x+2=0$.

b/ $\left(x+1\right)\sqrt{x^2-2x+3}=x^2+1$.

c/ $\left(4x-1\right)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2x+1$.

d/ $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$.

Ngoài cách giải thông thường ở trên, ta còn một số phương pháp giải khác

- *Phương pháp đánh giá dùng các bất đẳng thức cơ bản : BĐT Cauchy, BĐT Bunhiacopxki, BĐT hình học, ……*
- *Phương pháp lượng giác hóa*
- *Phương pháp khảo sát hàm số*
- *……………*